# Wigner, Curry et Howard

La déraisonnable efficacité des mathématiques

Exposé au colloque ARCo'04, Sciences cognitives
Université de Compiègne, 10 déc. 2004

Jean-Louis Krivine

Université Paris VII, C.N.R.S.

Pourquoi la logique fait-elle partie des sciences cognitives, c'est-à-dire des sciences du cerveau ? Je voudrais vous montrer, dans ce bref exposé, qu'elle est un outil puissant et irremplaçable pour explorer en profondeur le fonctionnement du cerveau.

La logique est vue, d'habitude, comme la recherche des vérités irréfutables. Elle est née, il y a fort longtemps, quand on a commencé à faire des mathématiques, c'est-à-dire des *démonstrations* et qu'on a voulu comprendre ce qu'étaient réellement les démonstrations. On voulait savoir comment les mathématiciens s'y prenaient pour obtenir des propositions à la fois *irréfutables* et *intéressantes*. En effet, il est facile d'obtenir des propositions logiquement vraies (du genre syllogisme, tout homme est mortel, etc.), mais ce sont toujours des lapalissades sans aucun intérêt. Ce n'est pas le cas pour les théorèmes de mathématiques. La logique se propose donc de répondre à la fameuse question du physicien Eugène Wigner sur la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ». Bien sûr, Wigner n'a fait que formuler de façon imagée ce très ancien problème qui est, en fait, à l'origine de la logique.

Pour répondre à cette question, il fallait tout d'abord analyser les démonstrations, les décomposer en éléments simples ; autrement dit, il fallait *formaliser* les mathématiques, travail qui a été achevé dans les années 30 avec le théorème de complétude et l'axiomatique de la théorie des types et de la théorie des ensembles.
En vérité, il est très surprenant que cette formalisation soit possible, car on réduit ainsi tous les raisonnements mathématiques à un petit nombre de règles et d'axiomes tous plus évidents les uns que les autres. Un exemple typique est le *modus ponens* : des propositions A et A → B, on déduit la proposition B. Etant donnée l'immense variété des modes de raisonnement en mathématiques, on aurait pu penser, au contraire, qu'on en inventait sans cesse de nouveaux. Le théorème de complétude montre qu'il n'en est rien.

Cette formalisation, qui donne les « règles du jeu » et permet de simuler les démonstrations sur ordinateur, est un résultat de logique fondamental et indispensable. Mais s'il nous apprend beaucoup sur la mécanique des démonstrations, il ne nous dit toujours rien sur la nature des mathématiques et la question posée par Wigner. Tout va changer avec une autre découverte importante de logique, qui a commencé dans les années 60 et qu'on appelle maintenant la *correspondance de Curry-Howard* ou *correspondance preuves-programmes*. A ses débuts et pendant fort longtemps, cette correspondance s'est appuyée sur la *logique intuitionniste* ; cette logique fut introduite dans les années 30 par Brouwer, puis formalisée par

Heyting. Elle est identique à la logique usuelle (appelée *logique classique*) à ceci près que l'usage du raisonnement par l'absurde ou, ce qui revient au même, du tiers exclu, est interdit (rappelons que le raisonnement par l'absurde consiste à déduire une proposition A de la proposition « (non A) → A » ; et que le tiers exclu est la proposition « A ou non A »).
La correspondance de Curry-Howard associe, à chaque preuve en logique intuitionniste, un *programme*, écrit dans un langage de programmation de bas niveau appelé $\lambda$-calcul, introduit et étudié par Church puis Kleene, puis bien d'autres ... Au début, cela n'a pas semblé révolutionnaire, puisque la logique intuitionniste est généralement considérée comme « constructive ». On trouvait donc normal qu'une preuve intuitionniste corresponde à un calcul. Par contre, le tiers exclu étant considéré comme non constructif, on était bien certain que la correspondance ne pouvait s'étendre à la logique classique. Il n'était évidemment pas question de l'étendre à toutes les preuves mathématiques : en effet, le raisonnement mathématique utilise bien plus que la logique classique. Il lui faut les axiomes de la théorie des types ou ceux de la théorie des ensembles. A l'époque, c'était un dogme que la correspondance de Curry-Howard était et resterait limitée à la logique intuitionniste.

Avec toutes ces idées a priori, pas étonnant que ce soit, non pas un logicien, mais un informaticien du nom de Tim Griffin, qui ait découvert en 1990, l'instruction qu'il fallait associer au tiers exclu, permettant ainsi, contre toute attente, d'étendre la correspondance preuves-programmes à la logique classique. Il a obtenu ce résultat en cherchant à typer les *instructions de contrôle* de l'un des dialectes de LISP, le langage SCHEME, qui est basé sur le $\lambda$-calcul. Il faut noter que cette instruction existait depuis bien longtemps, dans beaucoup de langages de programmation, mais n'était bien sûr connue que des informaticiens. Heureusement, Griffin ignorait qu'il n'avait pas le droit de se servir du raisonnement par l'absurde.

Et maintenant, tous les axiomes de la théorie des ensembles, y compris l'axiome du choix dépendant, sont entrés dans la correspondance de Curry-Howard. Il ne reste plus que l'axiome du choix complet, mais on peut penser raisonnablement qu'il rentrera bientôt dans l'ordre lui aussi[1].

Quoi qu'il en soit, nous savons donc maintenant associer un programme à chaque démonstration mathématique. Cette transformation est syntaxiquement très simple et un ordinateur l'effectue aisément. Mais il faut noter qu'elle n'est pas du tout intuitive. Le comportement du programme obtenu est toujours intéressant, mais fort difficile à élucider.
En tous cas, cela veut dire que les mathématiciens, Euclide, Archimède, Euler, Gauss, Riemann et les autres, ont écrit, depuis plus de 2500 ans, des millions de lignes de programmes et des programmes extrêmement sophistiqués. Pourquoi écrire des programmes, si on n'a pas d'ordinateur pour les faire tourner ? Une conclusion évidente s'impose : il y avait bien un ordinateur et cet ordinateur ne peut être que le cerveau humain.

Nous voyons maintenant un peu mieux ce que fait le mathématicien : il écrit des programmes en langage de bas niveau (comme l'assembleur) et il les type (la preuve d'un théorème s'identifie, en effet, au typage d'un programme écrit en $\lambda$-calcul). Mais il reste un point à éclaircir : est-ce qu'il invente ces programmes de toutes pièces pour les faire tourner dans son ordinateur-cerveau personnel et celui de ses collègues ? ou bien est-ce qu'il se con-

[1] Mai 2005 : c'est chose faite (article à paraître). Pour plus de détails, voir « A machine for programs extracted with the axiom of choice » APPSEM II Workshop, Birmingham, mai 2005, sur http://www.pps.jussieu.fr/~krivine.

tente de lire des programmes déjà présents dans la mémoire morte de cet ordinateur ? La réponse est facile, il suffit d'écrire une preuve d'un théorème non trivial même élémentaire, par exemple le théorème de Rolle pour fixer les idées. Considérons maintenant le programme obtenu qui occupe quelques pages de code. On n'a pas la moindre idée du comportement de ce programme et c'est bien là le problème le plus intéressant posé par la correspondance de Curry-Howard. Maintenant, il est clair que le mathématicien n'a rien programmé du tout, sinon il saurait à quoi peut servir le programme obtenu. Il s'est contenté de lire ce programme dans la mémoire morte de son cerveau.

Qui donc a écrit ces programmes ? La réponse s'impose d'elle-même : nous les possédons héréditairement comme toutes les autres caractéristiques de notre espèce. Ils font partie de nos organes vitaux, comme les yeux, les mains, les poumons, ... C'est l'évolution qui est le programmeur.

En informatique, le problème de comprendre le comportement d'un programme à partir de son code après compilation, s'appelle *désassemblage*. C'est un travail long et difficile, qui demande beaucoup de flair et d'astuce ; et il n'y a aucune certitude d'en venir à bout.
Le mathématicien est donc essentiellement un « désassembleur », plus précisément il fait une partie fort importante du travail, qui est d'extraire le code de la mémoire morte, le transcrire et le typer. A partir de là, le logicien va essayer de comprendre le comportement de ces programmes ; autrement dit, il va tenter d'obtenir la *spécification* qui est associée à un théorème.

Je voudrais revenir maintenant à la question de Wigner : pourquoi le monde physique est-il soumis à des lois mathématiques ? Pourquoi les planètes suivent-elles la loi de Newton (pas tout à fait d'ailleurs, la « vraie » loi est donnée par la relativité générale) ? pourquoi les ondes radio se conforment-elles aux équations de Maxwell ?

Nous venons de nous apercevoir que les lois mathématiques sont, en fait, des programmes écrits dans la mémoire morte de notre cerveau. Dire que le monde physique se conforme à de telles lois revient donc à dire qu'il se conforme à des programmes écrits dans notre cerveau. L'anthropocentrisme ridicule de cette affirmation saute aux yeux, nous voilà revenus au temps où les planètes, le soleil et les étoiles tournaient autour de la terre et où les oranges étaient divisées en quartiers pour que nous puissions les consommer plus facilement. Wigner a tout à fait raison de trouver cela « déraisonnable ».
Mais non, bien sûr, c'est la terre qui tourne sur elle-même et autour du soleil et nous entraîne dans sa course ! C'est l'évolution qui a écrit ces programmes dans notre cerveau pour notre adaptation au monde qui nous entoure et ce n'est pas le monde physique qui se conforme à ces programmes. Maxwell, Newton et Einstein ont découvert les lois mathématiques et les équations qui portent leur nom, dans leur propre cerveau et non dans le monde physique. Ces lois donnent une description remarquable de notre environnement, pour la bonne et simple raison que l'évolution a fait correctement son travail. Si ce n'était pas le cas, nous savons bien qu'il n'y aurait personne pour parler de tout cela.
A propos, je viens de vous donner un excellent exemple de raisonnement par l'absurde !

**********